シャノンのゲームと2重マトロイド(離散数理モデルにおける最適組合せ構造)

山崎, 洋平

数理解析研究所講究録
820巻 1993年 76-81

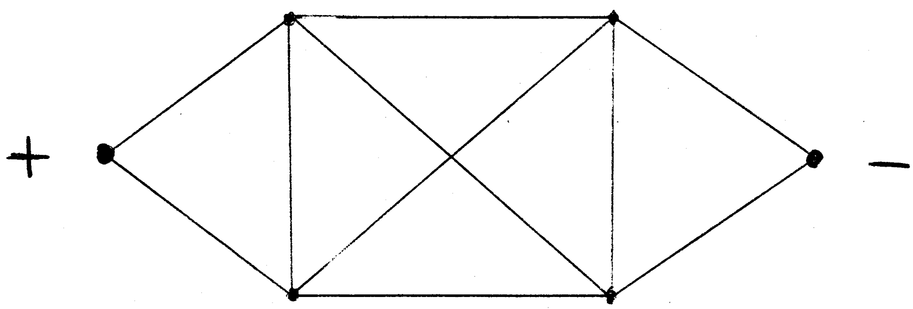
シャノンのゲームと2重マトロイド

Shannon switching games and double matroids

阪大・医療短大　山崎洋平
Yōhei YAMASAKI　Osaka Univ.

シャノンのゲームは2端点をもつグラフ上で2人の競技者が交互着手することにより次のように競技される：

競技者 Short は自分の番のとき辺を1つ短絡消去し、
競技者 Cut は自分の番のとき辺を1つ消去する。
最終的に2端点が結合すれば Short が、
最後まで結合しなければ Cut の勝ちである。



このゲームのヴァリエーションとして端点の数を増やすことが考えられる。また勝敗の規定もいろいろ考えられる。

しかしこのゲームが最も一般的で無理なく解決するのは次に挙げる「２重マトロイド」を用いた設定であろう：

有限集合Ｅ，その上のマトロイド構造Ｍ’，Ｍ，定数ｄの４つ組で deg = rank’ - rank が増加的なものを考える。
先ほどの例では、Ｅは辺の全体、Ｍ’は forest の全体、
Ｍは２端点を結合しても forest であるものの全体、ｄは
１である。短絡消去、消去の結果Ｅ，Ｍ’，Ｍはそれに応じて変形する。また短絡消去の結果 deg(Ｅ) が１小さくなったときはｄを１減じる。着手を繰り返した結果 deg(Ｅ) が０になれば Short の勝ちである。

この定式化はよいことずくめである。第一に必勝法理論に関しては古典的なシャノンのゲームに対する理論がより簡明化された形で適用される。すなわちＭ-生成なＭ’の元の対のうち対称差の位数を最小とするもの（Ａ，Ｂ）の deg の平均がｄの減少するであろう値である（平均が半整数のときは先・後に連動して切り上げ・切り捨て）。

第二点はこの範疇がかなり広く、次のような多端点のシャノン風ゲームを含み、その中には少し変形すると「本質的」に難しいものまであるということである（すなわち、((＃))に関しては「２対」を「３対」に変えると「非可逆」）。

((T ^{k})) 結合の結果端点をk以上減じれば Short の勝ち

((CCC)) 所定のグループそれぞれについて、含まれる端点をすべて結合すれば Short の勝ち

((M$^\lambda$)) 結合される端点の個数がどれも $0 \bmod \lambda$ になれば Short の勝ち

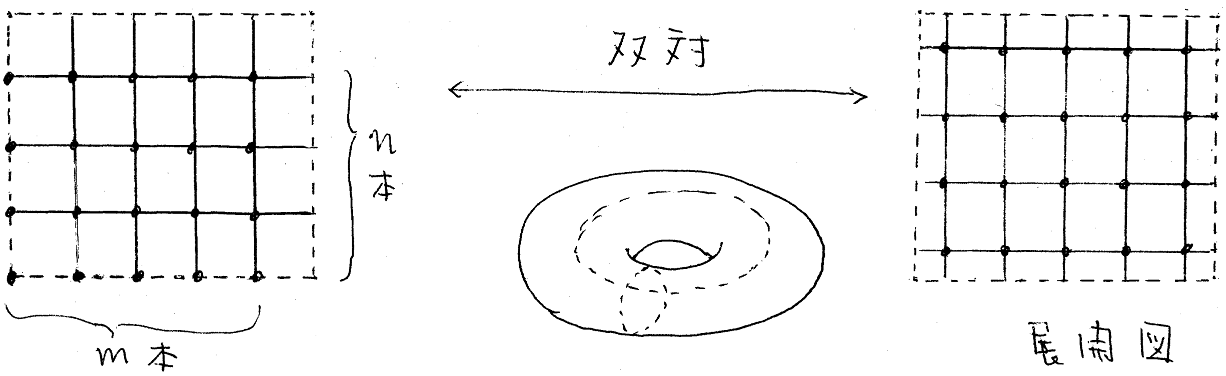
((＃)) ２対の端点のうち少なくとも１対を結合すれば Short の勝ち

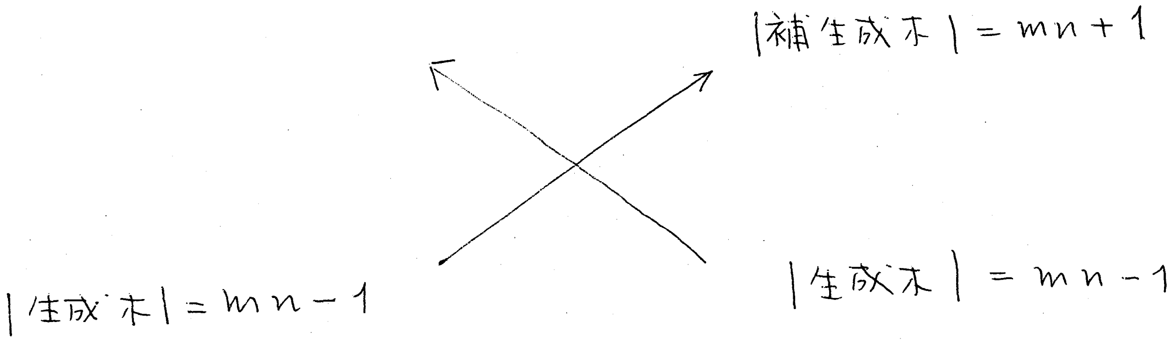
第三点は理論的にすっきりしているという点である。すなわちここには「端点」や「架空の辺」はなく、また両競技者の立場は cycle $\longleftrightarrow$ cut のような翻訳抜きに全く対等である。

$$E,\ M',\ M,\ d \longleftrightarrow E,\ M^*,\ M'^*,\ d^*$$

ここに $d^* = \deg E - d + 1$

２重マトロイドという考え方は多様体の上のグラフをマトロイド化するのにも有効である。連結な球面（平面）的グラフとその双対の関係はマトロイドにも反映される。しかし、他の多様体の上に描かれたグラフではその限りではない。トーラスにｍ本の経線とｎ本の緯線を描いたｍｎ頂点と２ｍｎ辺をもつグラフでは、心情的にはこの双対としてこれを平行移動して得られる同型なグラフを考えたくなる。しかし元のグラフのマトロイドを考えると生成木はｍｎ－１辺からなり、双対マトロイドとは同型ではない。





一般に2次元閉多様体Vの胞複体から導かれるグラフに対しては M＝{サイクルを持たない辺集合}, M’＝{S ｜ サイクルで生成される$H_1(V, Z_2)$の部分群の次元が ｜S｜－ rank S である辺集合}と考えると（M’, M）は2重マトロイドをなし、V上のグラフとしての双対は2重マトロイドとしての双対に反映する。

$$(M', M) \longleftrightarrow (M^*, M'^*)$$

多様体（球面を含む）上のグラフが多様体とグラフの2重構造であるように、そのマトロイド版についても2重構造を考えるのが妥当であると思われる。

参考文献

[1] 組み合わせゲームの裏表、シュプリンガー・フェアラーク東京、1989

[2] Shannon switching games without terminals II, Graphs and Combinatorics 5, 1989, 275-282

[3] Difficulty in particular Shannon-like games, Discrete Applied Math. 30, 1991, 87-90

[4] Shannon switching games without terminals III, Graphs and Combinatorics (to appear)

[5] The reconstruction of a double matroid from a game (submitted)